Поправителен изпит по "Дискретни структури", 03. 02. 2016 г., СУ, ФМИ

Име: ______________________________ ФН: _____ Спец./курс: _______

Задача	1	2	3	4	Общо
получени точки					
максимум точки	20	30	30	30	110

Забележка: За отлична оценка са достатъчни 100 точки!

Задача 1. Нека R_1 и R_2 са двуместни релации над множеството A и $R_1 \subset R_2$. Докажете, че:
а) ако R_2 е антисиметрична, то и R_1 е антисиметрична;
б) ако R_1 е рефлексивна, то и R_2 е рефлексивна.

Задача 2. Четири точки лежат в равностранен триъгълник със страна 1. Докажете, че поне две от тях са на разстояние, по-малко от $\frac{2}{3}$.
Упътване: Покрийте триъгълника с помощта на три кръга с диаметър $d < \frac{2}{3}$ и приложете принципа на Дирихле.

Задача 3. Нека графът B_4 е 4-мерният двоичен куб (неговите върхове са всички редици от нули и единици с дължина 4; два върха са свързани, ако и само ако съответните редици се различават в точно една позиция).
а) Какъв е броят на всички най-кратки пътища от върха 0010 до върха 1001?
б) Постройте хамилтонов цикъл в B_4.
в) Ойлеров граф ли е B_4?

Задача 4. За двоичната функция $f(x, y, z)$, определена с таблицата по-долу, намерете:
а) съвършената дизюнктивна нормална форма; (5 точки)
б) минималната дизюнктивна нормална форма; (15 точки)
в) полинома на Жегалкин. (10 точки)
БОНУС: Шеферова функция ли е f? (15 точки)

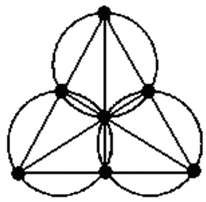
x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

РЕШЕНИЯ

Задача 1. а) Да допуснем противното: че R_1 не е антисиметрична. Тогава съществуват различни a и b от множеството A, за които $(a\,,\,b) \in R_1$ и $(b\,,\,a) \in R_1$. Понеже $R_1 \subset R_2$, то $(a\,,\,b) \in R_2$ и $(b\,,\,a) \in R_2$. Следователно R_2 не е антисиметрична, което е противоречие.

б) Нека a е произволен елемент от A. Понеже релацията R_1 е рефлексивна, то $(a\,,\,a) \in R_1$. От $R_1 \subset R_2$ следва, че $(a\,,\,a) \in R_2$. Тъй като елементът a беше избран от A произволно, то $(a\,,\,a) \in R_2$ за $\forall a \in A$. Следователно релацията R_2 е рефлексивна.

Задача 2.



Щом триъгълникът е равностранен, то всяка медиана е и височина. Които и две страни на триъгълника да вземем, средите им, общият връх и центърът на триъгълника образуват четириъгълник с два срещуположни прави ъгъла, около който следователно може да се опише окръжност. Има три такива четириъгълника (по един при всеки връх на триъгълника). Окръжностите, описани около тези четириъгълници, ограждат три кръга, които заедно покриват равностранния триъгълник. Всяка от отсечките, които свързват връх на равностранния триъгълник с неговия център, е диаметър на съответния кръг, понеже се вижда под прав ъгъл от средите на прилежащите страни на триъгълника. Следователно трите диаметъра имат една и съща дължина $d = \frac{2}{3}\,m$, където m е дължината на коя да е медиана на триъгълника (използваме свойството на медицентъра да дели всяка медиана в отношение $2:1$, считано от върха на триъгълника). Но в равностранния триъгълник всяка медиана е и височина, а дължината на височината не надвишава дължините на страните през същия връх (защото перпендикулярът е най-късото разстояние от точка до права). Следователно $m < 1$, където 1 е дължината на страната на равностранния триъгълник. От $d = \frac{2}{3}\,m$ и $m < 1$ следва, че $d < \frac{2}{3}\cdot$

Тъй като трите кръга покриват равностранния триъгълник, имаме право да приложим принципа на Дирихле: както и да вземем четири точки в равностранния триъгълник, сигурно е, че поне две от тях ще лежат в един и същи кръг. Разстоянието между тези две точки не надхвърля дължината d на диаметъра на кръга, следователно е по-малко от $\frac{2}{3}\cdot$

Задача 3. а) Редиците 0010 и 1001 се различават в три позиции (№ 1, № 3 и № 4), затова най-късите пътища от върха 0010 до върха 1001 имат дължина 3. При всяка стъпка по такъв път се променя точно една от цифрите в тези три позиции; при това, на всяка стъпка се променя различна позиция и всяка от трите цифри се променя само веднъж (иначе пътят ще бъде по-дълъг от три стъпки).

Следователно най-късите пътища от единия до другия връх се различават само по реда, в който се променят цифрите на трите позиции. Тоест съществува биекция между най-късите пътища от 0010 до 1001 и пермутациите на три елемента (номерата 1, 3 и 4 на позициите). Например 0010 — 0011 — 1011 — 1001 е един най-къс път (с дължина 3) от 0010 до 1001; на него му съответства пермутацията $(4\,,\,1\,,\,3)$, защото първо се променя четвъртата цифра, после — първата, накрая — третата.

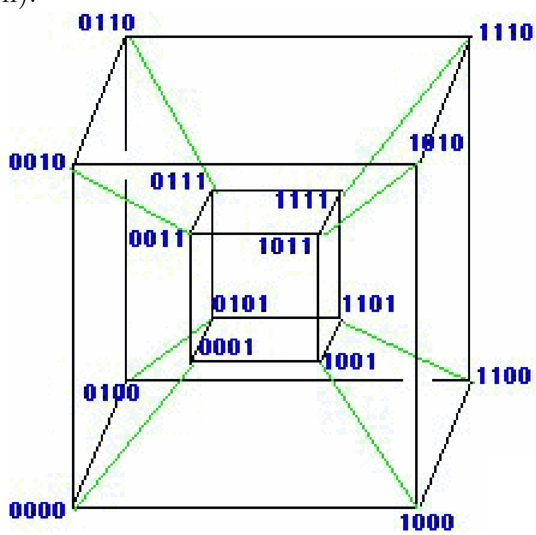
Затова броят на най-кратките пътища от върха 0010 до върха 1001 е равен на броя на пермутациите на три елемента (числата 1, 3 и 4), тоест отговорът е $P_3 = 3! = 6$.

б) Хамилтонов цикъл в n-мерния двоичен куб (код на Грей) можем да построим чрез индукция. При $n = 2$ (в двоичния квадрат) хамилтоновият цикъл изглежда така: 00 — 01 — 11 — 10. При $n > 2$ хамилтоновият цикъл се дефинира индуктивно: зад получената редица от върхове се дописва същата редица, но отзад напред, след което добавяме по една цифра в началото на всеки връх: 0 — за върховете от първата половина, 1 — за върховете от втората половина. При $n = 3$ се получава цикълът 000 — 001 — 011 — 010 — 110 — 111 — 101 — 100. При $n = 4$ получаваме търсения хамилтонов цикъл в четиримерния двоичен куб:

$$\begin{array}{l} 0000 - 0001 - 0011 - 0010 - 0110 - 0111 - 0101 - 0100 \\ | \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad | \\ 1000 - 1001 - 1011 - 1010 - 1110 - 1111 - 1101 - 1100 \end{array}$$

в) Четиримерният двоичен куб B_4 е ойлеров граф, тъй като е свързан и не съдържа върхове от нечетна степен (всички върхове са от четвърта степен).

Пример за затворена ойлерова верига в B_4 (която минава по всяко ребро точно веднъж и се връща във върха, от който е тръгнала): 0000, 0100, 1100, 1000, 0000, 0001, 1001, 1101, 1100, 1110, 1111, 0111, 0011, 0010, 1010, 1000, 1001, 1011, 1010, 1110, 0110, 0111, 0101, 1101, 1111, 1011, 0011, 0001, 0101, 0100, 0110, 0010, с последния ход се връща във върха 0000.



Задача 4. а) От таблицата на f съставяме съвършената дизюнктивна нормална форма:
$f = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,z \vee \overline{x}\,y\,z \vee x\,\overline{y}\,z \vee x\,y\,\overline{z}\,.$

в) За да получим полинома на Жегалкин, преобразуваме дизюнтивната нормална форма: първо заместваме включващата дизюнкция с изключваща (понеже тази дизюнктивна форма е съвършена), после заместваме отрицанието със събиране с 1 (истина) и разкриваме скобите:
$f = (x+1)(y+1)(z+1) + (x+1)(y+1)z + (x+1)yz + x(y+1)z + xy(z+1) =$
$= xyz + xy + yz + xz + x + y + z + 1 \quad + \quad xyz + xz + yz + z \quad +$
$+ \quad xyz + yz \quad + \quad xyz + xz \quad + \quad xyz + xy\,.$
След като унищожим еднаквите събираеми по двойки, получаваме полинома на Жегалкин:
$f = xyz + xz + yz + x + y + 1\,.$

Бонус: Функцията f е шеферова, защото сама образува пълно множество. За да докажем това, ще изразим чрез f отрицанието и конюнкцията (за които знаем, че образуват пълно множество):
$\overline{x} = f(x,x,x)\,; \qquad xy = \overline{f(x,x,y)} = f\Big(f(x,x,y)\,,\ f(x,x,y)\,,\ f(x,x,y)\Big).$
Тези тъждества се проверяват по табличния метод или чрез полинома на Жегалкин.

Твърдението, че f е шеферова функция, може да се докаже и с критерия на Пост.

б) Най-напред по алгоритъма на Куайн—Маккласки намираме простите импликанти на f (те са обозначени със звездички). След това решаваме задачата за минималното покритие, за да определим кои от тях са задължителни.

Таблица на истинност:

	x	y	z	f
0:	0	0	0	1
1:	0	0	1	1
2:	0	1	0	0
3:	0	1	1	1
4:	1	0	0	0
5:	1	0	1	1
6:	1	1	0	1
7:	1	1	1	0

Импликанти (от ред 0):

	x	y	z	
0:	0	0	0	$\rightarrow$
1:	0	0	1	$\rightarrow$
3:	0	1	1	$\rightarrow$
5:	1	0	1	$\rightarrow$
6:	1	1	0	*

Импликанти (от ред 1):

	x	y	z	
0, 1:	0	0	–	*
1, 3:	0	–	1	*
1, 5:	–	0	1	*

Таблица на простите импликанти:

	x	y	z	0	1	3	5	6	
0, 1:	0	0	–	●	○				$\bar{x}\bar{y}$
1, 3:	0	–	1		○	●			$\bar{x}z$
1, 5:	–	0	1		○		●		$\bar{y}z$
6:	1	1	0					●	$xy\bar{z}$

Задължителни прости импликанти: $\bar{x}\bar{y}$, $\bar{x}z$, $\bar{y}z$, $xy\bar{z}$.

Минимална дизюнктивна нормална форма:

$$f = \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}z \vee \bar{y}z \vee xy\bar{z} .$$