Домашно № 2 по дисциплината "Дискретни структури" за специалност "Компютърни науки", I курс, II поток, зимен семестър на 2018/2019 уч. г. в СУ, ФМИ

Име: .... Факултетен № .... Група: .....

Задача	1	2	3	Общо
получени точки				
максимум точки	*25*	*25*	*50*	*100*

Забележка 1: *Всички отговори трябва да бъдат обосновани подробно.*

Забележка 2: *Не предавайте идентични решения дори когато работите заедно: идентичните решения ще бъдат анулирани!*

Задача 1. В международно състезание участват 1985 души. Измежду всеки трима от тях има поне двама, които говорят един и същ език. Всеки участник владее не повече от пет езика. Да се докаже, че има поне двеста души, които знаят един и същ език.

Задача 2. Нека $\mathcal{F}$ е семейство от подмножества на $\left\{1, 2, \ldots, n\right\}$ със следните свойства:
— Ако $A \in \mathcal{F}$, то $|A| = 3$.
— Ако $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$ и $A \neq B$, то $|A \cap B| \leq 1$.
Да се докаже, че $|\mathcal{F}| \leq \dfrac{n^2 - n}{6}$ за всяко цяло $n \geq 3$.

Задача 3. Да се докажат тъждествата:

а) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} 2^{n-k} + \sum_{k=0}^{m} \binom{n+k}{k} 2^{m-k} = 2^{m+n+1};$$ **(25 точки)**

б) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n}.$$ **(25 точки)**

РЕШЕНИЯ

Задача 1. Разглеждаме два случая за участниците в състезанието.

Първи случай: Всеки двама участници имат поне един общ език. Нека A е някой участник. По условие A знае най-много пет езика и има общ език с всеки от другите 1984 състезатели. От принципа на Дирихле следва, че съществува поне един език, на който състезателят A може да общува с най-малко $\left\lceil \frac{1984}{5} \right\rceil = 397$ други състезатели. Заедно с A те образуват множество от $398 > 200$ души, които знаят един и същ език.

Втори случай: Някои двама участници A и B нямат общ език. Всеки друг състезател има общ език с A или B (по условие). От принципа на Дирихле следва, че поне единият от двамата, например A, има общ език с най-малко $\left\lceil \frac{1983}{2} \right\rceil = 992$ от останалите 1983 състезатели. Но A знае не повече от пет езика, затова (пак от принципа на Дирихле) измежду тези 992 състезатели има поне $\left\lceil \frac{992}{5} \right\rceil = 199$, говорещи с A на един и същ език. Въпросните 199 участници заедно с A образуват множество от 200 души, които знаят един и същ език.

Задача 2. По условие всяко множество от $\mathcal{F}$ има три елемента, затова притежава три на брой двуелементни подмножества. Тъй като (отново по условие) различните множества от $\mathcal{F}$ имат най-много един общ елемент, то техните двуелементни подмножества са две по две различни. Ето защо двуелементните подмножества на всички множества от $\mathcal{F}$ са общо $3\,|\,\mathcal{F}\,|$ на брой. От друга страна, те са не повече от всички двуелементни подмножества на $\left\{1\,,\;2\,,\;\ldots\;,\;n\right\}$, тоест

$$3\,|\,\mathcal{F}\,| \;\leq\; C_n^2 \;=\; \frac{n(n-1)}{2} \;=\; \frac{n^2-n}{2}\,,$$

следователно

$$|\,\mathcal{F}\,| \;\leq\; \frac{n^2-n}{6}\,.$$

Задача 3.

а) Тъждеството

$$\sum_{k\,=\,0}^{n} \binom{m+k}{k}\, 2^{\,n-k} \;+\; \sum_{k\,=\,0}^{m} \binom{n+k}{k}\, 2^{\,m-k} \;=\; 2^{\,m+n+1}$$

е равносилно на

$$\sum_{k\,=\,0}^{n} \binom{m+k}{m}\, 2^{\,n-k} \;+\; \sum_{k\,=\,0}^{m} \binom{n+k}{n}\, 2^{\,m-k} \;=\; 2^{\,m+n+1}.$$

То може да се докаже с помощта на комбинаторни разсъждения. Нека множеството M се състои от естествените числа между 1 и $m+n+1$ включително. Колко са подмножествата на M с поне $m+1$ елемента? Очевидно $(m+1)$-ият по големина елемент на такова подмножество (ако броенето върви от най-малкия към най-големия елемент) е цяло число от вида $m+k+1$ за някое цяло $k \in [\,0\,;\,n\,]$. Елементите на подмножеството, по-малки от $m+k+1$, са m на брой измежду числата $1,\ 2,\ \ldots\ ,\ m+k,$ затова могат да бъдат избрани по $C_{m+k}^{m} = \binom{m+k}{m}$ начина. Другите елементи на подмножеството са измежду числата $m+k+2,\ m+k+3,\ \ldots\ ,\ m+n+1$ ($n-k$ на брой), затова могат да бъдат избрани по $2^{\,n-k}$ начина.

Следователно $\dbinom{m+k}{m}\,2^{\,n-k}$ е броят на подмножествата на M, чийто $(m+1)$-и елемент е равен на $m+k+1$. След сумиране по възможните стойности на k (от 0 до n вкл.) следва, че $\sum\limits_{k\,=\,0}^{n}\dbinom{m+k}{m}\,2^{\,n-k}$ е броят на подмножествата на M с поне $m+1$ елемента.

Аналогично, $\sum\limits_{k\,=\,0}^{m}\dbinom{n+k}{n}\,2^{\,m-k}$ е броят на подмножествата на M с поне $n+1$ елемента. Поради биекцията между подмножествата и техните допълнения тази сума представлява също броят на подмножествата на M с не повече от $(m+n+1)-(n+1)=m$ елемента.

Всяко подмножество на M има или поне $m+1$ елемента, или не повече от m елемента. Следователно сборът

$$\sum_{k\,=\,0}^{n}\binom{m+k}{m}\,2^{\,n-k}\;+\;\sum_{k\,=\,0}^{m}\binom{n+k}{n}\,2^{\,m-k}$$

е равен на $2^{\,m+n+1}$, колкото е броят на всички подмножества на M.

б) Ще използваме обобщението на биномната формула на Нютон:

$$(x+y+z)^{\,2n}\;=\sum_{i\,+\,j\,+\,k\,=\,2n}\binom{2n}{i\;,\;j\;,\;k}\,x^{\,i}\,y^{\,j}\,z^{\,k},$$

където сумирането е по всички цели неотрицателни числа i, j, k със сбор $2n$,

$$\binom{2n}{i\;,\;j\;,\;k}\;=\;\frac{(2n)\,!}{i\,!\,j\,!\,k\,!}$$

е мултиномният коефициент. Във формулата полагаме $x=1$, $y=u^2$, $z=\dfrac{1}{4u^2}$:

$$\left(1+u^2+\frac{1}{4u^2}\right)^{2n}\;=\sum_{i\,+\,j\,+\,k\,=\,2n}\binom{2n}{i\;,\;j\;,\;k}\,\frac{u^{\,2\,(j-k)}}{4^{\,k}}\,,$$

$$\left[\left(u+\frac{1}{2u}\right)^2\right]^{2n}\;=\sum_{i\,+\,j\,+\,k\,=\,2n}\frac{(2n)\,!}{i\,!\,j\,!\,k\,!\,4^{\,k}}\;u^{\,2\,(j-k)},$$

$$\left(u+\frac{1}{2u}\right)^{4n}\;=\sum_{i\,+\,j\,+\,k\,=\,2n}\frac{(2n)\,!}{i\,!\,j\,!\,k\,!\,4^{\,k}}\;u^{\,2\,(j-k)}.$$

Развиваме лявата страна според биномната формула:

$$\sum_{k\,=\,0}^{n}\binom{4n}{k}u^k\left(\frac{1}{2u}\right)^{4n-k}\;=\sum_{i\,+\,j\,+\,k\,=\,2n}\frac{(2n)\,!}{i\,!\,j\,!\,k\,!\,4^{\,k}}\;u^{\,2\,(j-k)},$$

$$\sum_{k\,=\,0}^{n}\binom{4n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{4n-k}u^{2k-4n}\;=\sum_{i\,+\,j\,+\,k\,=\,2n}\frac{(2n)\,!}{i\,!\,j\,!\,k\,!\,4^{\,k}}\;u^{\,2\,(j-k)}.$$

Това равенство е тъждество относно u. Затова коефициентите пред съответните степени на u са равни. Сравняваме свободните членове, тоест членовете с нулев степенен показател на u. В лявата страна нулев показател се получава при $2k-4n=0 \iff k=2n$, поради което свободният член отляво е равен на $\dbinom{4n}{2n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{4n-2n}=\dbinom{4n}{2n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}=\dbinom{4n}{2n}\dfrac{1}{4^{\,n}}\,.$

В дясната страна показателят е нула при $j = k$, тогава $i = 2n - 2k$ и k се мени от 0 до n. Ето защо свободният член отдясно е равен на

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2n-2k)!\,k!\,k!\,4^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(2n-2k)!\,(2k)!} \cdot \frac{(2k)!}{k!\,k!} \cdot \frac{1}{4^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\frac{1}{4^k}\,.$$

Свободните членове в лявата и дясната страна на тъждеството са равни, тоест

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k}\frac{1}{4^k} = \binom{4n}{2n}\frac{1}{4^n}\,.$$

Умножаваме това равенство с 4^n и получаваме

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 4^{n-k} = \binom{4n}{2n},$$

тоест

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}\binom{2k}{k} 2^{2n-2k} = \binom{4n}{2n},$$

което трябваше да се докаже.

Домашното съдържа задачи от материалите на международното жури по провеждането на Балканската олимпиада по математика.